CHAPITRE T3

Conduction thermique

Rappel

Les transferts thermiques peuvent avoir lieu sous trois formes :

- conduction : transfert d'énergie cinétique par chocs microscopiques. Un milieu physique est nécessaire
- convection : transfert d'énergie via un fluide en mouvement
- rayonnement : transfert via des ondes électromagnétiques. Le transfert a lieu dans les deux sens et n'a pas besoin d'un milieu matériel

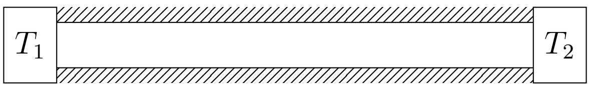
En général, les trois modes de transfert coexistent mais le plus efficace est la convection dès qu'elle est possible.

Dans le cadre de ce chapitre, on étudie la conduction.

I - Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

I.A - Equilibre thermodynamique local

On considère le problème suivant : une barre calorifugée est en contact avec deux milieux de températures différentes.



On attend très longtemps : l'équilibre est-il atteint ?

Définition (Etat d'équilibre thermodynamique local)

On appelle état d'équilibre thermodynamique local un état du système dans lequel l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique, mais pas à l'échelle macroscopique.

Conséquence importante

Remarque
Dans le cas introductif, on étudiera donc le champ $T(x,t)$.
En mécanique des fluides, on faisait déjà cette hypothèse pour parler de $P(x,t)$.

I.B - Flux thermique

Définition (Flux thermique à travers une surface)

On définit le flux thermique Φ_S à travers la surface S comme la puissance thermique traversant S, i.e. le transfert thermique traversant S par unité de temps :

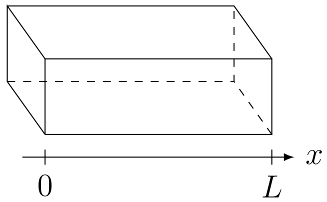
Remarque
On remarque la proximité avec la définition du flux massique ou volumique en mécanique des fluides.
Dans tous les domaines étudiant des phénomènes de transport, on retrouvera les mêmes outils, comme le flux/débit par exemple.

Définition (Vecteur densité de flux thermique)

Remarque

- On pourra fréquemment trouver comme notation pour le vecteur densité de flux : $\overrightarrow{j_{th}}$, $\overrightarrow{j_Q}$ ou $\overrightarrow{j}$.
- A priori, on a $\overrightarrow{j_{th}} = \overrightarrow{j_{cond}} + \overrightarrow{j_{conv}} + \overrightarrow{j_{ray}}$, mais en pratique on n'aura souvent que la conduction et éventuellement la conducto-convection.

Application - Orientation du vecteur densité de flux



On considère une barre de côté carré a.
On impose $T(x=0) > T(x=L)$. La température n'évolue plus dans la barre et $\vec{j}_{\text{th}} = j_x \vec{e}_x$ avec j_x uniforme et constant au cours du temps.

1. Donner le signe de j_x.
2. Exprimer le flux entrant par la face en $x=0$. Commenter son signe.
3. Exprimer le flux sortant par la face en $x=0$. Commenter son signe.
4. Exprimer le flux entrant par la face en $x=L$. Commenter son signe.
5. Exprimer le flux sortant par la face en $x=L$. Commenter son signe.

I.C - Loi de Fourier

Loi de Fourier

Le vecteur densité de flux thermique **par conduction** est lié au gradient de température :

où λ est une caractéristique du matériau, appelée conductivité thermique.

Remarque
C'est une loi phénoménologique (=expérimentale)

Rappel - le gradient
Soit f une fonction **scalaire** de l'espace :

- ▷ en cartésien : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$ (♡ ♡ à savoir)
- ▷ en cylindrique : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$ (sera rappelé si nécessaire)
- ▷ en sphérique : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$ (sera rappelé si nécessaire)

Interprétation

- sens :

- norme :

Ordres de gandeurs de la conductivité

Matériau	Conductivité (W.m-1.K-1)
Cuivre	4.10^2
Aluminium	2.10^2
Acier	16
Béton	1
Glace (0°C)	2,4
Verre	0,6 $\rightarrow$ 2
Bois	$1,5.10^{-1} \rightarrow 4,5.10^{-1}$
Polystyrène expansé	4.10^{-2}
Laine de verre	4.10^{-2}

I.D - A l'interface entre 2 matériaux

I.D.1 - Continuité

Continuité du flux thermique

Remarque
En revanche la température peut être discontinue !

Définition (Contact thermique parfait)

Lorsque T est continue, on dit que les matériaux de part et d'autre de l'interface sont en contact thermique parfait.

I.D.2 - A l'interface liquide/solide

Lorsqu'un fluide de température T_{flu} circule autour d'un solide de température $T_{sol} \neq T_{flu}$, il peut y avoir convection. Ce phénomène est difficile à quantifier, mais on peut modéliser les échanges au niveau du solide en supposant que sur une fine couche de fluide, il y a conduction. Pour le phénomène global, on parle alors de conducto-convection.
La loi de Newton, qui sera toujours rappelée, modélise ce phénomène.

Loi de Newton

h est le coefficient conducto-convectif (en W.m^{-2}.K^{-1})

Remarque
La loi sera toujours redonnée, mais la forme proposée peut varier.
Il est très important de toujours prendre un temps pour vérifier le sens de $\overrightarrow{j_{cc}}$: il sera toujours orienté vers la température la plus faible.

Application - Adaptation de la loi de Newton
On considère un cylindre d'axe (Oz) de rayon R et de longueur L, à la température T_0 baignant dans un fluide à la température $T_f > T_0$.
On prend en compte le flux conducto-convectif sur les parois latérales, décrit par la loi de Newton.
En choisissant judicieusement le paramétrage, exprimer $n_{f \to s}$ puis le transfert thermique reçu par le cylindre.

II - Equation de la diffusion thermique

II.A - Equation à une dimension cartésienne

Equation de diffusion thermique à 1D cartésienne

Démonstration

Remarque

- Sauf cas particulier, cette équation n'admet pas de solutions analytiques simples. Il faut alors faire une résolution numérique (cf TP à venir)
- Cette équation permet de montrer que le phénomène de diffusion thermique est irréversible :
- Cette démonstration est à connaître car beaucoup d'exercices consistent à la reprendre en l'adaptant (en ajoutant un terme source ou la loi de Newton sur les bords par exemple).

Application - Ajout d'un terme source

Considérons un fusible cylindrique de rayon a, et raisonnons sur un tronçon élémentaire de longueur dz. Ce tronçon échange un flux thermique par conduction selon l'axe $\overrightarrow{u_z}$, et est chauffé par effet Joule avec une puissance volumique $p = \frac{I^2}{\gamma S^2}$ (γ conductivité électrique).

Exprimer le transfert thermique δQ reçu par le tronçon de fusible pendant une durée élémentaire dt.

Déterminer l'équation différentielle satisfaite par T.

Exploitation de l'équation de la chaleur pour obtenir des ODG

- Au bout de combien de temps le régime permanent est-il atteint pour une tige de longueur L ?
- Au bout d'une durée donnée, jusqu'où le flux thermique s'est-il établi ?

Application - ODG

On plonge dans une flamme une lame de couteau de diffusivité $D = 1.10^{-5}$ m^2.s^{-1}.
Au bout de combien de temps ressent-on l'augmentation de température à 1 cm de la flamme ? à 2 cm ? à 3 cm ?

III - Conduction thermique en régime stationnaire

Rappel : le régime est dit stationnaire si les champs sont indépendants du temps

III.A - Conservation du flux thermique

Conservation du flux thermique en régime stationnaire

En régime stationnaire et en absence de production d'énergie thermique interne, le flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant pour n'importe quel système.
On dit qu'il y a conservation du flux (ou que le flux est conservatif, ou que $\overrightarrow{j}$ est à flux conservatif).

Démonstration

III.B - Gradient de température en 1D cartésienne

Méthode - Expression spatiale de T en régime stationnaire

Méthode 1 - via la conservation du flux (méthode à utiliser sur des géométries non cartésiennes)

Méthode 2 - via l'équation de la chaleur

Application - Gradient de température

On considère un mur d'épaisseur e et de section S supposé en régime stationnaire. On considère le problème 1D : $T = T(x)$

Déterminer le profil de température à l'intérieur du mur, en le supposant en contact thermique parfait avec l'air environnant.

III.C - Résistance thermique

III.C.1 - Définition et calcul

Définition (Résistance thermique)

Remarque
Attention au sens de Φ : il faut se placer en convention récepteur !

Méthode - Schéma équivalent

Méthode - Calcul de résistance thermique

Application
Calculer la résistance thermique d'un mur d'épaisseur e, de surface S et constitué d'un matériau de conductivité thermique λ.

III.C.2 - Association de résistances

Si on reprend l'analogie électrique :

- ▷ deux composants traversés par le même flux thermique sont
- ▷ deux composants aux extrémités desquels il y a la même différence de température sont

Association de résistances

La résistance équivalente R_{eq} de deux systèmes de résistances R_1 et R_2

- ▷ en série est

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

- ▷ en parallèle est

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Application - Double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux vitres d'épaisseur e en verre séparées par une couche d'air d'épaisseur e.

1. Justifier qu'il s'agisse d'une association en série.
2. Comparer la résistance thermique du double vitrage et celle d'une vitre d'épaisseur $3e$.
3. Comment pourrait-on améliorer ce double vitrage ? Quel problème apparaît ?

Données : $\lambda_{\text{air}} = 3.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda_{\text{verre}} = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}

Application - Mur et fenêtre

On considère un mur de dimensions 5 m$\times$3 m, de résistance thermique $R_0 = 2.10^{-2}$ K/W. Celui-ci est percé d'une fenêtre de 20 cm de côté et de résistance thermique $R = 8.10^{-2}$ K/W.

1. Le mur est plus épais et en béton (bon isolant), comment expliquer que sa résistance thermique soit alors plus faible que celle de la fenêtre en simple vitrage ?
2. Calculer la proportion de mur occupée par la fenêtre.
3. Calculer la résistance thermique totale. Quelle proportion des pertes est imputable à la fenêtre ?